

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas
Nivel Superior
Prueba 3 – análisis

Martes 10 de noviembre de 2020 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Utilice la regla de l'Hôpital para hallar

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x^2 - 1) - 1}{e^{x-1} - x}.$$

2. [Puntuación máxima: 10]

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3x)^n}{n}$.

(a) Muestre que la serie es convergente para $\frac{4}{3} < x < 2$. [5]

(b) Halle el intervalo de convergencia de la serie. [5]

3. [Puntuación máxima: 18]

La función pendiente de la curva $y = f(x)$ viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = x - y.$$

La curva pasa por el punto $(1, 1)$.

(a) (i) En los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente y rotule las isoclinas correspondientes a $\frac{dy}{dx} = -1, 0$ y 1 , e indique claramente el valor de cada intersección con el eje y .
 (ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, explique por qué el punto $(1, 1)$ es un mínimo local. [6]

(b) Halle la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$ que pasa por el punto $(1, 1)$.
 Dé la respuesta en la forma $y = f(x)$. [8]

(c) (i) Explique por qué el gráfico de $y = f(x)$ no corta a la isoclina $\frac{dy}{dx} = 1$.
 (ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$ sobre los mismos ejes de coordenadas del subpartado (a)(i). [4]

4. [Puntuación máxima: 15]

La función f se define como $f(x) = \ln(1 + x^2)$ donde $-1 < x < 1$.

- (a) (i) Utilice el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ para escribir los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)$.
- (ii) A partir de lo anterior, halle los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin de $\frac{x}{1 + x^2}$. [6]
- (b) Utilice la respuesta que ha dado en el subapartado (a)(i) para escribir una estimación de $f(0,4)$. [1]

La derivada séptima de f viene dada por $f^{(7)}(x) = \frac{1440x(x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7)}{(1 + x^2)^7}$.

- (c) (i) Utilizando la expresión de Lagrange para el término complementario (resto), halle un límite superior para el valor absoluto del error cometido al calcular $f(0,4)$ a partir de los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)$.
- (ii) Haciendo referencia a la expresión de Lagrange para el término complementario (resto), explique si la respuesta que ha dado en el apartado (b) es una sobreestimación o una subestimación de $f(0,4)$. [8]